Derivadas de Funções Vetoriais

Professor: Gustavo Adolfo

Resumo

Definição de Derivada

Definição: a derivada de uma função vetorial $r(t) = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}$ é:

$$r'(t) = \lim_{c \to 0} \frac{r(t+c) - r(t)}{c}$$

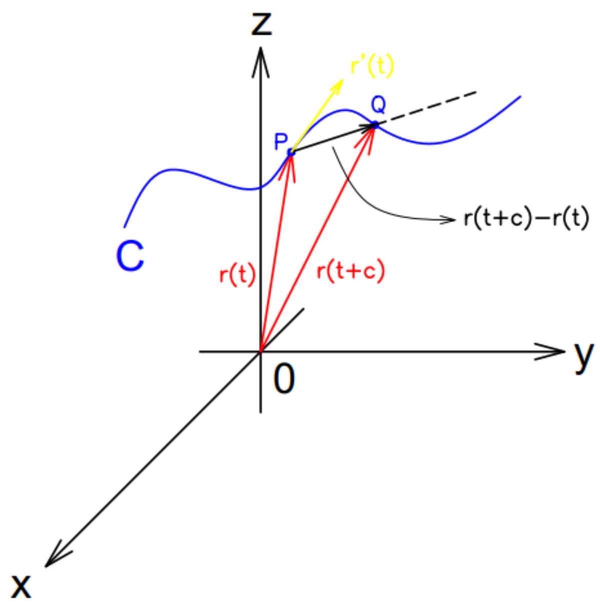

Figura 1. Função Vetorial.

Sendo $r'(t)$ o vetor tangente ao ponto P.

Teorema: Se as funções f, g e k são diferenciáveis, então:

$$r'(t) = f'(t)\,\hat{\imath} + g'(t)\,\hat{\jmath} + h'(t)\,\hat{k}$$

Demonstração:

$$\lim_{c \to 0} \frac{r(t+c) - r(t)}{c} = \lim_{c \to 0} \frac{\left[f(t+c)\,\hat{\imath} + g(t+c)\,\hat{\jmath} + h(t+c)\,\hat{k}\right] - \left[f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}\right]}{c} =$$

$$\lim_{c \to 0} \left[\frac{f(t+c) - f(t)}{c}\right] \hat{\imath} + \lim_{c \to 0} \left[\frac{g(t+c) - g(t)}{c}\right] \hat{\jmath} + \lim_{c \to 0} \left[\frac{h(t+c) - h(t)}{c}\right] \hat{k} = f'(t)\,\hat{\imath} + g'(t)\,\hat{\jmath} + h'(t)\,\hat{k}$$

Ex.1: Encontre a derivada da função vetorial $r(t) = (1 + t^3)\,\hat{\imath} + t \cdot e^{-t}\,\hat{\jmath} + \text{sen}(2t)\,\hat{k}$

Resolução:
Estudando cada uma das componentes:
$f(t) = (1 + t^3) \Rightarrow\ f'(t) = 3t^2$
$g(t) = t \cdot e^{-t} \Rightarrow\ g'^{(t)} = e^{-t} - t \cdot e^{-t} = e^{-t} \cdot (1 - t)$
$h(t) = \text{sen}(2t) \Rightarrow h'(t) = 2\cos(2t)$
Logo,

$$r'(t) = 3t^2\,\hat{\imath} + e^{-t} \cdot (1 - t)\,\hat{\jmath} + 2\cos(2t)\,\hat{k}$$

Ex.2: Encontre o vetor tangente unitário quando $t = 0$ para a função $r(t)$ do exemplo anterior.

Resolução:
Aplicando o valor de $t = 0$ no vetor encontrado no exemplo anterior:

$$r'(0) = 0\,\hat{\imath} + 1\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$$

O módulo desse vetor é igual a:

$$|r'(0)| = \sqrt{5}$$

Logo, o vetor tangente unitário é igual a:

$$\frac{r'(0)}{|r'(0)|} = \left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Ex.3: Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva $C: (x, y, z) = (2\cos(t), \text{sen}(t), t), t \in \mathbb{R}$, no ponto $(0,1,\pi/2)$.

Resolução:
O vetor diretor da curva é:

$$r(t) = (2\cos(t), \text{sen}(t), t)$$

Derivando cada uma das componentes:
$f(t) = 2\cos(t) \Rightarrow\ f'^{(t)} = -2\text{sen}(t)$
$g(t) = \text{sen}(t) \Rightarrow\ g'^{(t)} = \cos(t)$
$h(t) = \text{t} \Rightarrow h'(t) = 1$
Logo,

$$r'(t) = (-2\text{sen}(t), \cos(t), 1)$$

Para obter o vetor tangente a curva no ponto $(0,1,\pi/2)$ basta aplicar o valor de t correspondente a esse ponto na função vetorial.
Como $z = \frac{\pi}{2} = t$ e $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, o valor de t correspondente a esse ponto é $\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2,0,1)$$

Regras de Diferenciação

Dados u e v duas funções vetoriais diferenciáveis , c um número real e f uma função real de variável real, temos que:

a) $\frac{d}{dt}[u(t)+v(t)] = u'(t)+v'(t)$

b) $\frac{d}{dt}[c \cdot u(t)] = c \cdot u'(t)$

c) $\frac{d}{dt}[f(t) \cdot u(t)] = f'(t) \cdot u(t) + f(t) \cdot u'(t)$

d) $\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$

e) $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$

f) Regra da Cadeia: $\frac{d}{dt}[u(f(t))] = u'(f(t)) \cdot f'(t)$

Ex.4: Encontre a derivada da função vetorial $u(t) \cdot v(t)$, sendo $u(t) = \text{sen}(t)\ \hat{\imath} + \cos(t)\ \hat{\jmath} + \text{t}\,\hat{k}$ e $v(t) = t\,\hat{\imath} + \cos(t)\ \hat{\jmath} + \text{sen}(t)\ \hat{k}$

Resolução:

Derivando cada um dos vetores separadamente. Primeiro o vetor $u(t)$:

$f_1(t) = \text{sen}(t) \Rightarrow\ f_1{}'(t) = \cos(t)$

$g_1(t) = \cos(t) \Rightarrow\ g_1{}'(t) = -\text{sen}(t)$

$h_1(t) = \text{t} \Rightarrow h_1{}'(t) = 1$

Logo,

$$u'(t) = \cos(t)\ \hat{\imath} - \text{sen}(t)\ \hat{\jmath} + 1\,\hat{k}$$

Agora o vetor $v(t)$:

$f_2(t) = t \Rightarrow\ f_2{}'(t) = 1$

$g_2(t) = \cos(t) \Rightarrow\ g_2{}'(t) = -\text{sen}(t)$

$h_2(t) = \text{sen}(t) \Rightarrow h_2{}'(t) = \cos(t)$

Logo,

$$v'(t) = \ 1\hat{\imath} - \text{sen}(t)\ \hat{\jmath} + \cos(t)\,\hat{k}$$

A derivada do vetor $u(t) \cdot v(t)$ será:

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t) =$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = (t \cdot \cos(t) - \text{sen}(t)\cos(t) + \text{sen}(t)) + (\ \text{sen}(t) - \text{sen}(t)\cos(t) + \text{t} \cdot \cos(t))$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = t \cdot \cos(t) +\ \text{sen}(t) - 2\,\text{sen}(t)\cos(t) + \text{sen}(t) + \text{t} \cdot \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = t \cdot \cos(t) +\ \text{sen}(t) - \text{sen}(2t) + \text{sen}(t) + \text{t} \cdot \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = 2t \cdot \cos(t) + 2\,\text{sen}(t) - \text{sen}(2t)$$

Integral de uma Função Vetorial

Seja $r(t) = f(t)\,\hat{\imath} + g(t)\,\hat{\jmath} + h(t)\,\hat{k}$ uma função vetorial, então sua integral definida é:

$$\int_a^b r(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\hat{\imath} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\hat{\jmath} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\hat{k}$$

Ex.5: Encontre a integral da função vetorial $r(t) = 2\cos(t)\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}(t)\ \hat{\jmath} + 2\mathrm{t}\,\hat{k}$ entre os pontos $t = 0$ e $t = \pi/2$.

Resolução:

A integral é igual a:

$$\int_0^{\pi/2} r(t)dt = \left(\int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\,dt\right)\hat{\imath} + \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)\,dt\right)\hat{\jmath} + \left(\int_0^{\pi/2} 2t dt\right)\hat{k}$$

$$\int_0^{\pi/2} r(t)dt = \left(2\operatorname{sen}(t)|_0^{\pi/2}\right)\hat{\imath} + \left(-\cos(t)|_0^{\pi/2}\right)\hat{\jmath} + \left(t^2|_0^{\pi/2}\right)\hat{k}$$

$$\int_0^{\pi/2} r(t)dt = 2(1-0)\,\hat{\imath} - (0-1)\,\hat{\jmath} + \left(\frac{\pi^2}{4} - 0\right)\hat{k}$$

$$\int_0^{\pi/2} r(t)dt = 2\,\hat{\imath} + 1\,\hat{\jmath} + \frac{\pi^2}{4}\hat{k}$$

Ex.6: Encontre a função vetorial $r(t)$, sabendo que $r'(t) = 2t\,\hat{\imath} + 3t^2\,\hat{\jmath} + \sqrt{t}\,\hat{k}$ e $r(1) = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

Resolução:

A integral indefinida é igual a:

$$r(t) = \int r'(t)dt = \left(\int 2tdt\right)\hat{\imath} + \left(\int 3t^2dt\right)\hat{\jmath} + \left(\int \sqrt{t}\,dt\right)\hat{k}$$

$$r(t) = \int r'(t)dt = t^2\,\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\,\hat{k} + C$$

Como $r(1) = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$:

$$r(1) = \int r'(t)dt = 1\,\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\,\hat{k} + C = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

Logo,

$$C = -\frac{2}{3}\,\hat{k}$$

Então, a função vetorial $r(t)$ é igual a:

$$r(t) = t^2\,\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{t^3} - 1\right)\hat{k}$$

Ou, simplificando...

$$r(t) = t^2\,\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\left(t\sqrt{t} - 1\right)\hat{k}$$